

## **Cours No 8.1**

### **Fatigue- Etude de cas**

**V.Michaud**

**Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne**



# Table des matières

---

- Fin du cours sur la fatigue: déformation, prédiction des durées de vie.
- Rappels et compléments sur les propriétés mécaniques de base
- Etude de cas de dimensionnement et choix des matériaux pour un réservoir sous pression

# Objectifs du cours

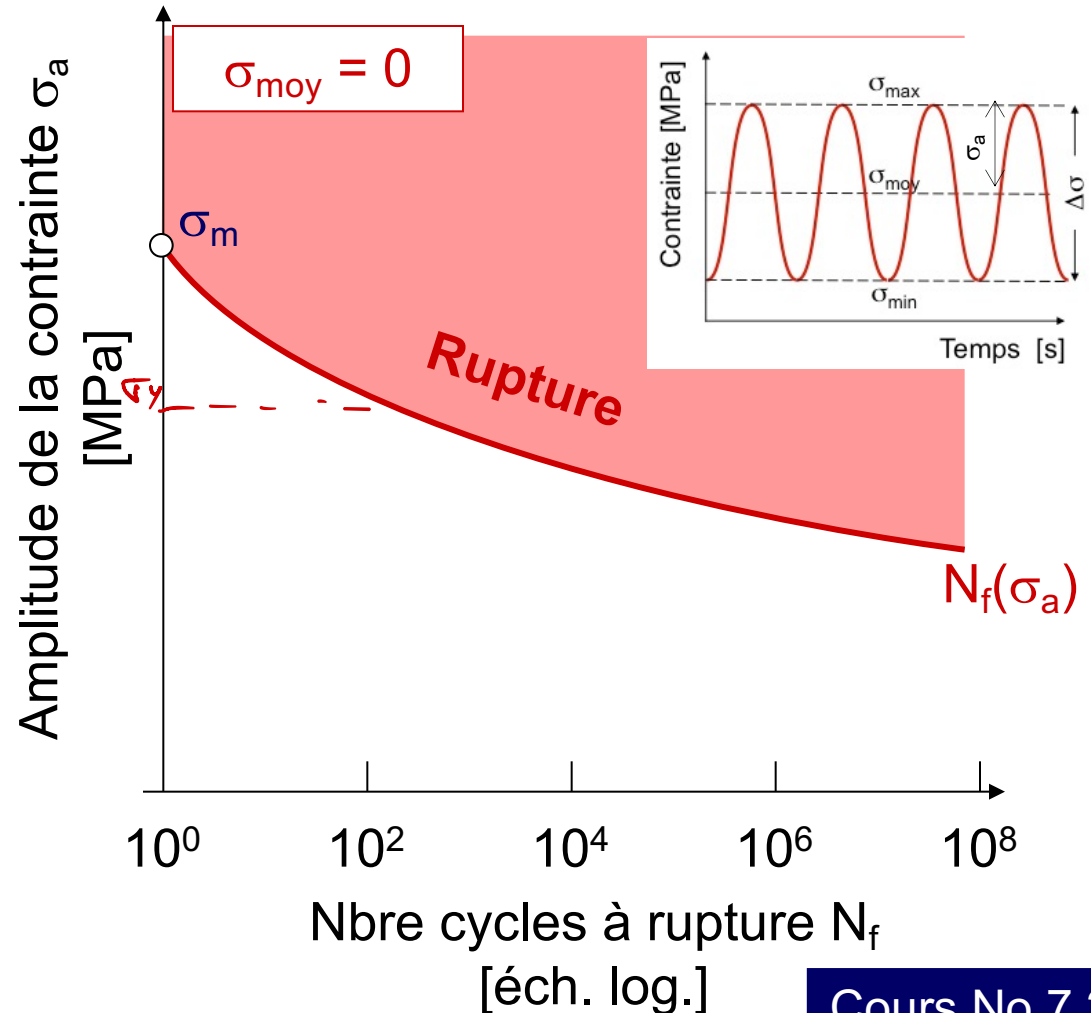
---

- Consolider les connaissances acquises en mécanique des matériaux et montrer une application pratique avec une étude de cas.
- Avant cela, voir comment on peut prédire la durée de vie en fatigue d'un matériau quand:
  - La contrainte moyenne n'est pas nulle
  - L'amplitude n'est pas constante
  - Le matériau comporte des fissures.

# Rappel Fatigue

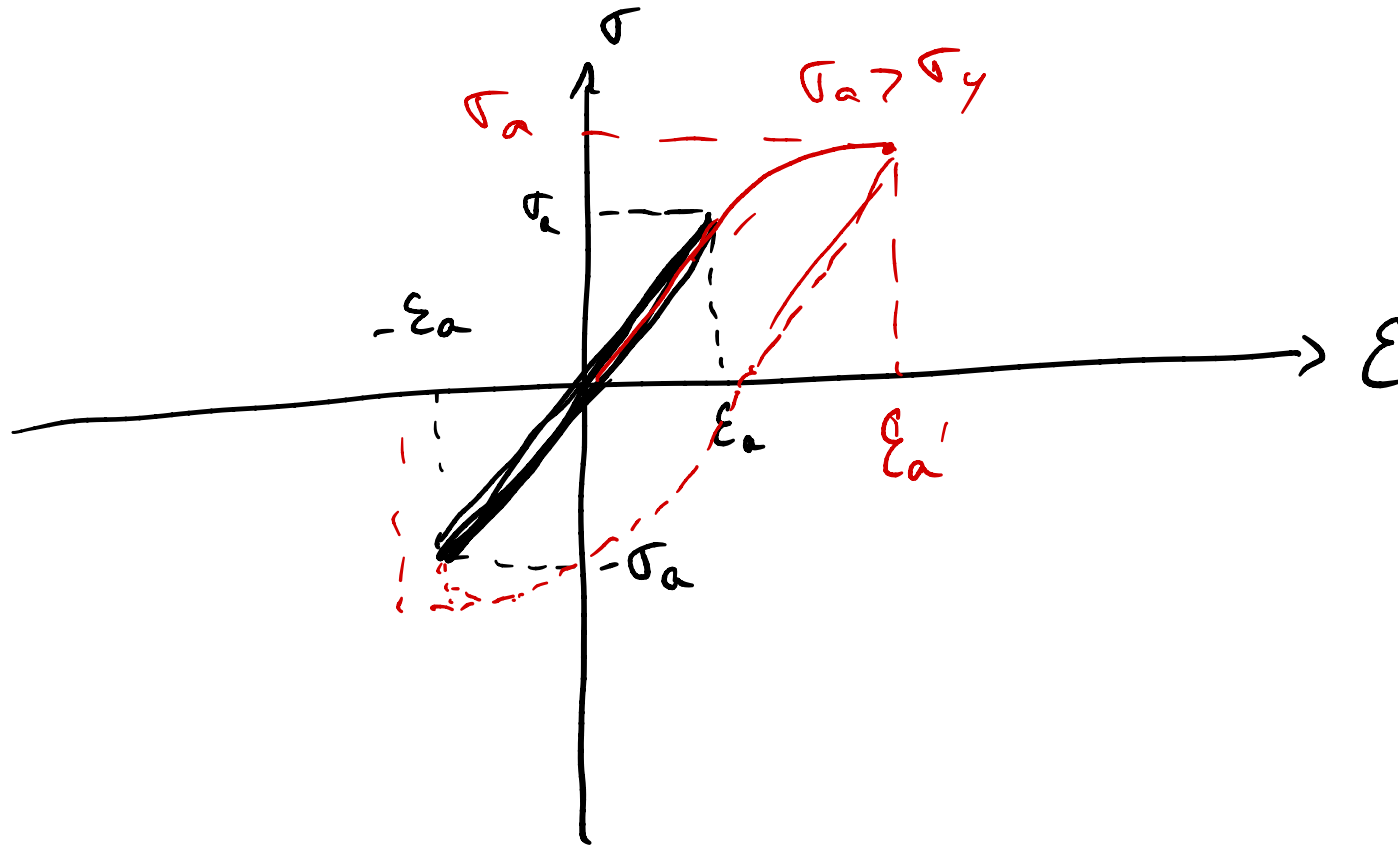
La résistance à la fatigue dépend de la **contrainte moyenne**,  $\sigma_{\text{moy}}$ , de l'**amplitude**  $\sigma_a$  et du **nombre de cycles**. On peut construire une **courbe (dite de Wöhler)** si on note après combien de cycle le matériau va rompre, pour une amplitude de contrainte donnée.

- Lorsque la contrainte max dépasse  $\sigma_Y$ , il y a **endommagement rapide** et le matériau supporte peu de cycles ("**low-cycle**" fatigue, ou **fatigue oligocyclique**).
- Lorsque la contrainte max est inférieure à  $\sigma_Y$ , le matériau peut supporter un grand nombre de cycles ("**high-cycle**" fatigue).

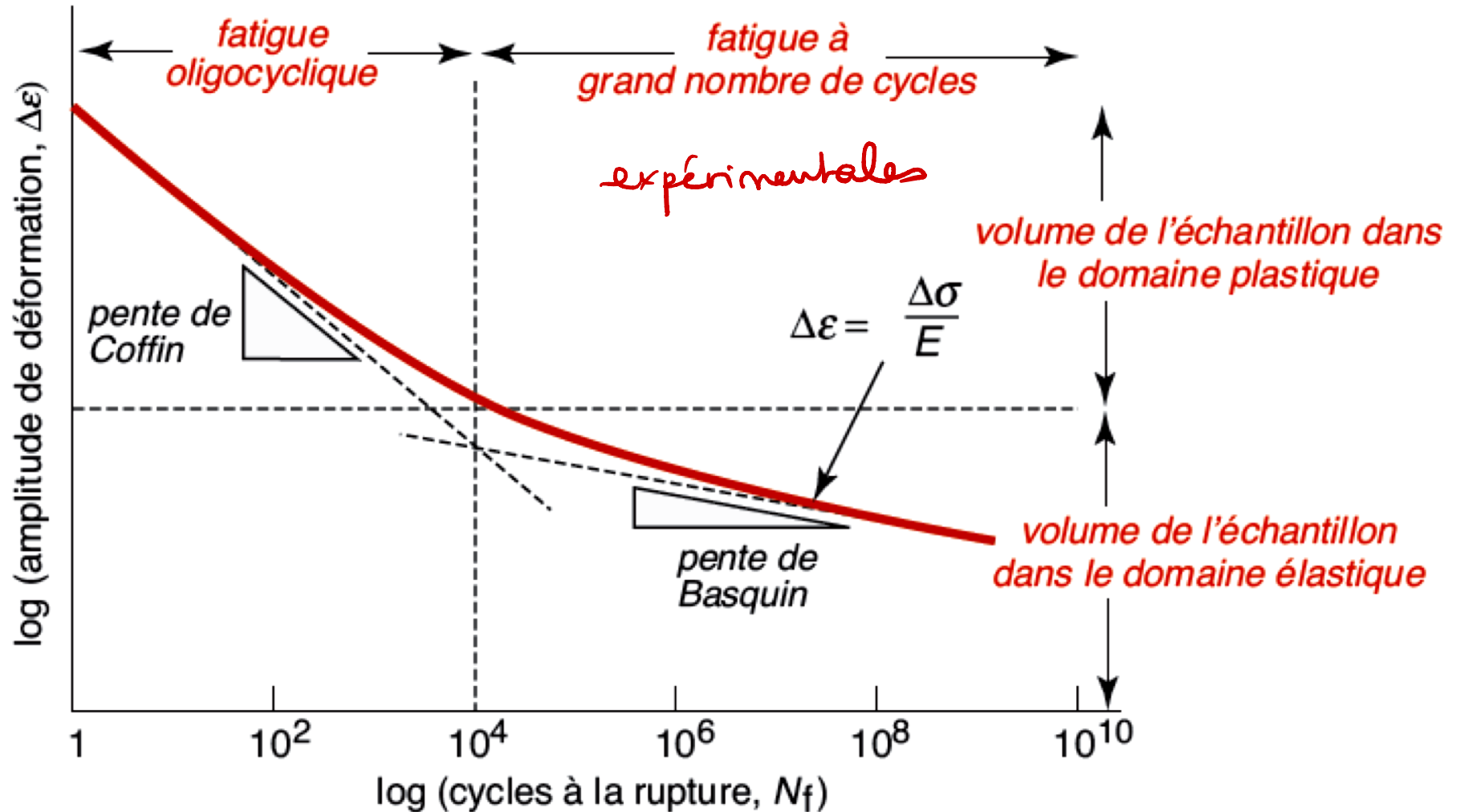


# Déformation lors de la Fatigue

Dans le régime de la fatigue usuelle ( $\sigma_{\max} < \sigma_Y$ ), l'échelle de la contrainte appliquée peut être facilement convertie en déformation. Pour la fatigue oligocyclique ( $\sigma_{\max} > \sigma_Y$ ), ceci n'est plus aussi simple.

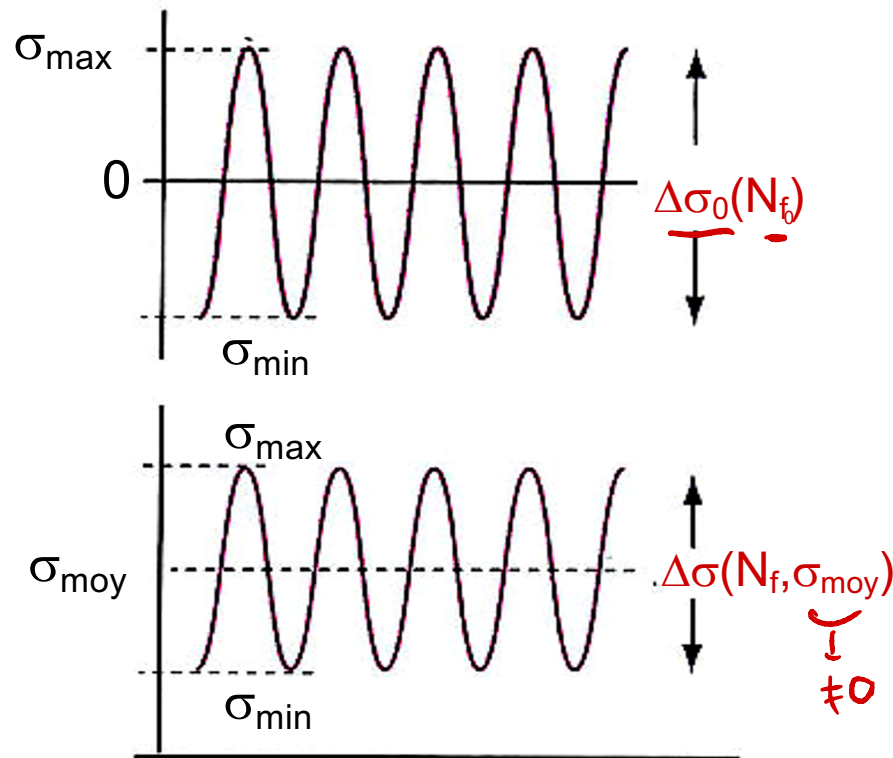


# Déformation lors de la Fatigue



# Fatigue avec contrainte moyenne non nulle

Comment adapter la courbe de Wöhler au cas où  $\Delta\sigma$  n'est pas appliquée autour de  $\sigma_{moy} = 0$  ? On a recours à des lois empiriques.



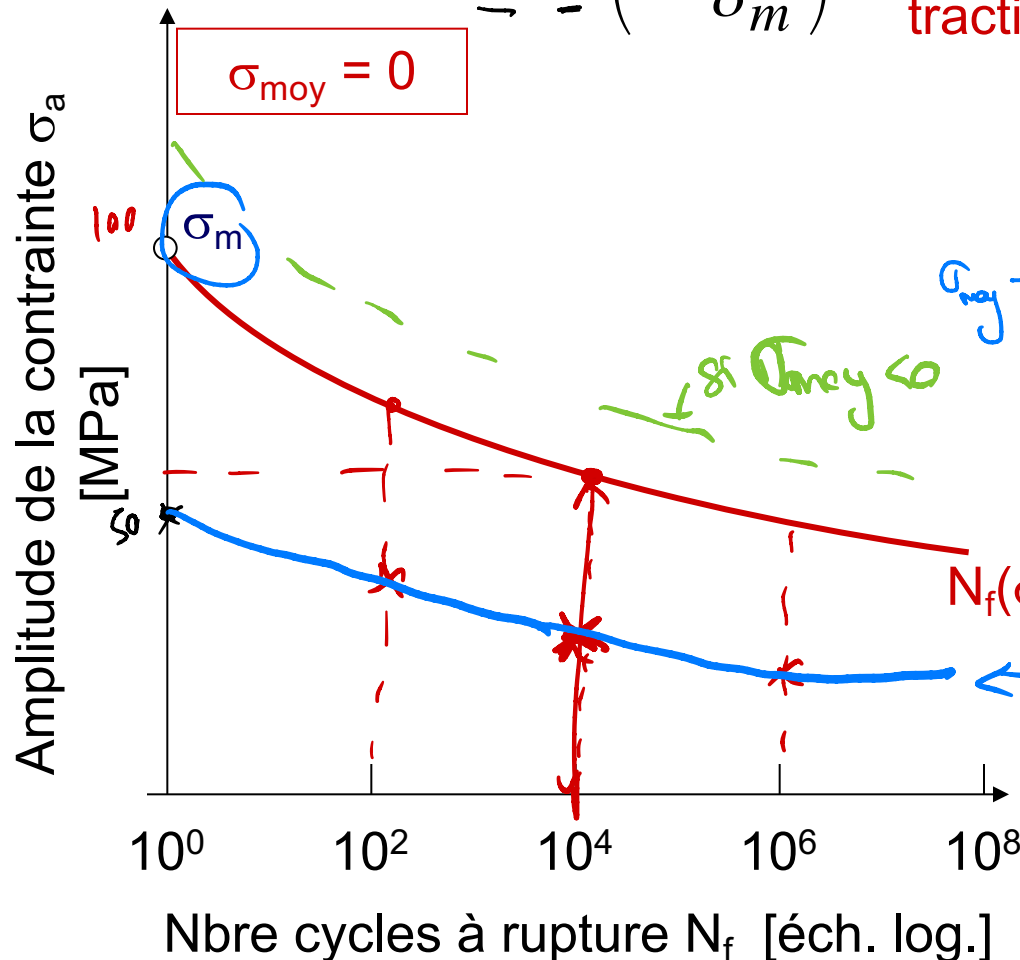
La loi de Goodman relie l'amplitude pour une contrainte moyenne non nulle qui correspond à un nombre de cycles à rupture  $N_f$ , avec l'amplitude pour une contrainte moyenne nulle, qui donne le même nombre de cycles à rupture  $N_f$

# Fatigue avec contrainte moyenne non nulle

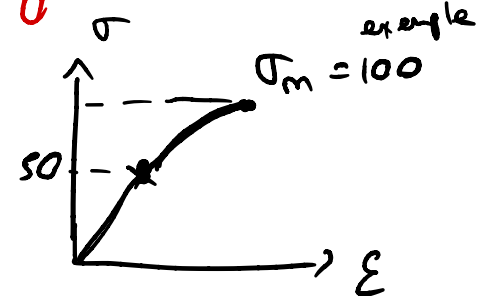
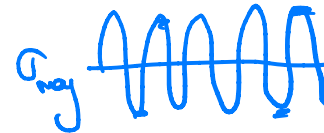
Comment adapter la courbe de Wöhler au cas où  $\Delta\sigma$  n'est pas appliquée autour de  $\sigma_{moy} = 0$  ? On a recours à des lois empiriques.

$$\sigma_a(N_f, \sigma_{moy}) = \sigma_a(N_f, 0) \left( 1 - \frac{\sigma_{moy}}{\sigma_m} \right)$$

Avec  $\sigma_m$  = contrainte à rupture en traction statique du matériau.



si  $\sigma_{moy} = 50$



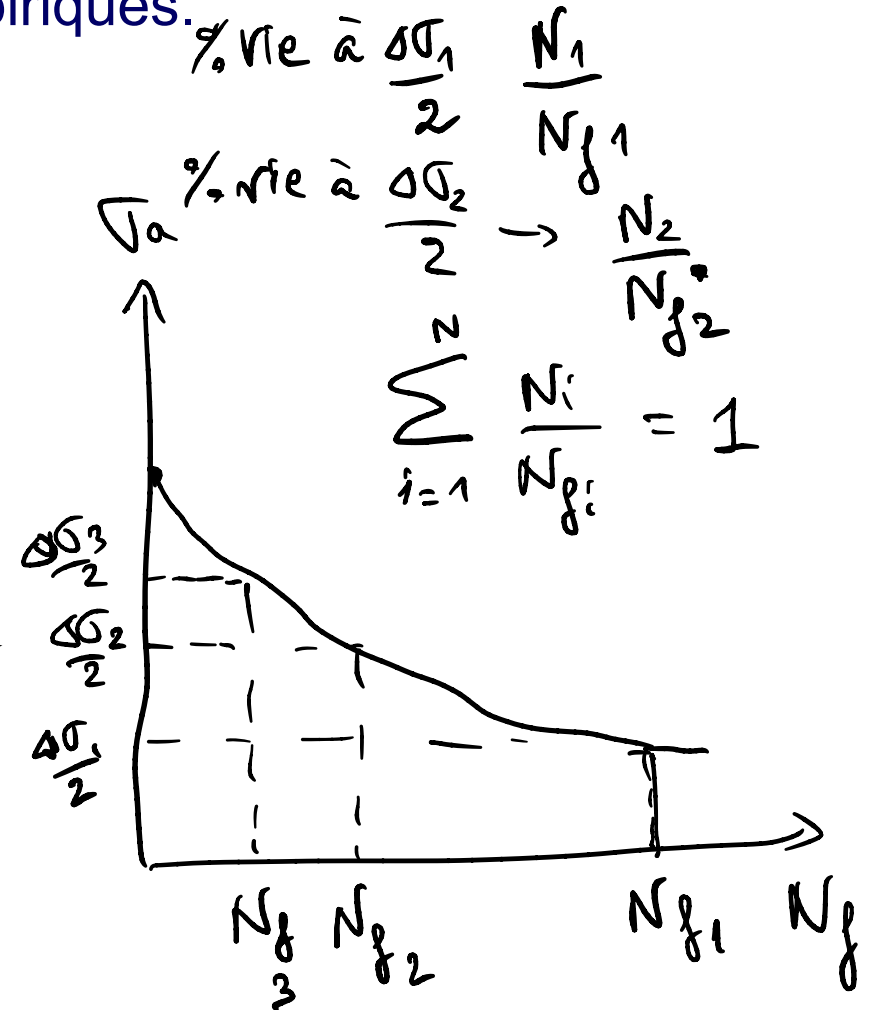
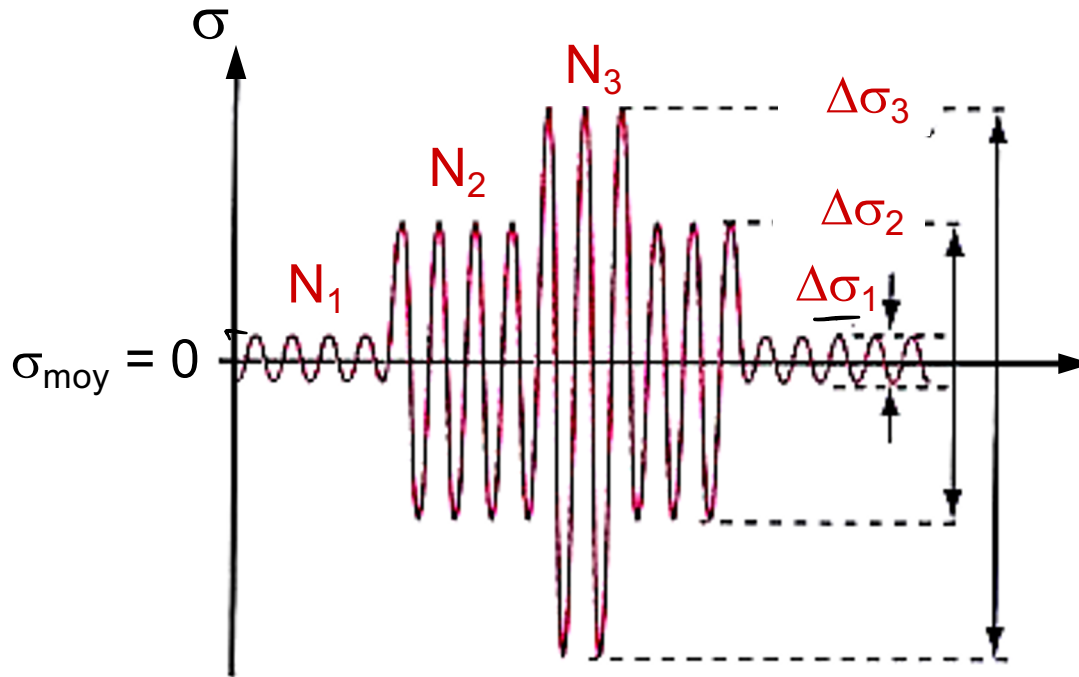
si  $\sigma_{moy} > 0$  traction  
courbe nouvelle  
sous la courbe  
de  $\sigma_{moy} = 0$

si  $\sigma_{moy} < 0$  compression  
courbe au dessus de  $\sigma_{moy} = 0$

# Fatigue avec variation de la contrainte

Comment adapter la courbe de Wöhler au cas où les cycles ne sont pas uniformes ? On a recours à des lois empiriques.

## Règle de Miner



# Fatigue avec variation de la contrainte

Comment adapter la courbe de Wöhler au cas où les cycles ne sont pas uniformes ? On a recours à des lois empiriques.

Règle de Miner

$$\sum_{i=1}^N \frac{N_i}{N_{f,i}} = 1 \rightarrow 100\% \text{ de la vie de l'échantillon}$$

Avec  $N_i$  le nombre de cycles faits avec l'amplitude  $\Delta\sigma_i/2$ , et  $N_{f,i}$  le nombre de cycles à rupture pour cette même amplitude.

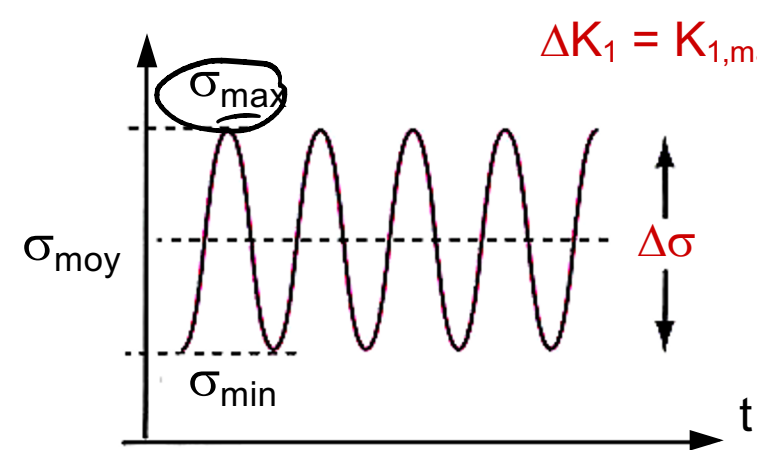
$$\frac{N_1}{N_{f1}} + \frac{N_2}{N_{f2}} + \frac{x}{3000} = 1$$

Handwritten calculation showing the Miner's rule equation with specific values:  $N_1 = 10$  cycles,  $N_{f1} = 10000$ ,  $N_2 = 100$ ,  $N_{f2} = 5000$ , and  $x$  cycles remaining.

$x$  nombre cycles restant à  $\frac{\Delta\sigma_3}{2}$  avant de casser.

# Fatigue de matériau fissuré

Que se passe-t-il si l'échantillon contient déjà des fissures? Avec  $\Delta\sigma$  appliqué constant, **le facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_1$  augmente** avec l'avance de la fissure de longueur  $l$ . Jusqu'à ce que  $K_1$  approche  $K_{1c}$ , où l'échantillon finit par se casser au cycle suivant.



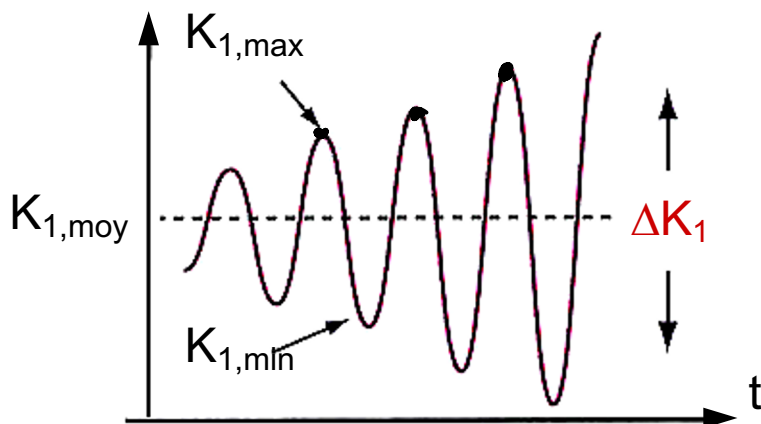
$$\Delta K_1 = K_{1,\max} - K_{1,\min} = \Delta\sigma\sqrt{\pi l}$$

$$K_1 = \sigma\sqrt{\pi l}$$

$$K_{1,\max} = \sigma_{\max}\sqrt{\pi l}$$

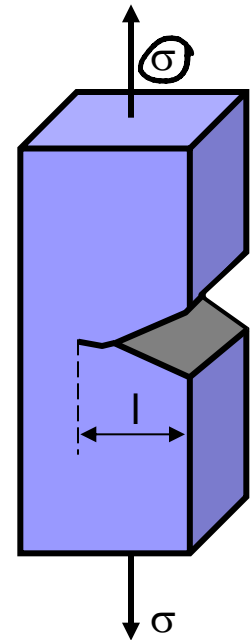
$$K_{1,\min} = \sigma_{\min}\sqrt{\pi l}$$

$$\Delta K_1 = \Delta\sigma\sqrt{\pi l} = 2\sigma_a\sqrt{\pi l}$$



si l grandit  
à chaque cycle

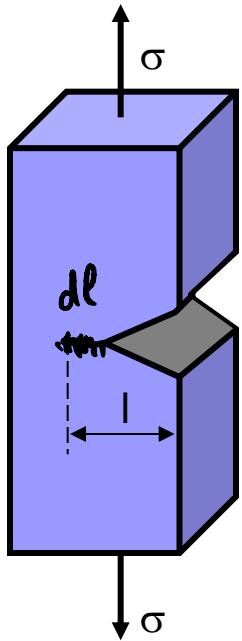
si  $K_1 > K_{1c} \rightarrow \text{boom!}$



# Fatigue de matériau fissuré

Que se passe-t-il si l'échantillon contient déjà des fissures? Avec  $\Delta\sigma$  appliqué constant, **le facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_1$  augmente** avec l'avance de la fissure de longueur  $l$ . Jusqu'à ce que  $K_1$  approche  $K_{1c}$ , où l'échantillon finit par se casser au cycle suivant.

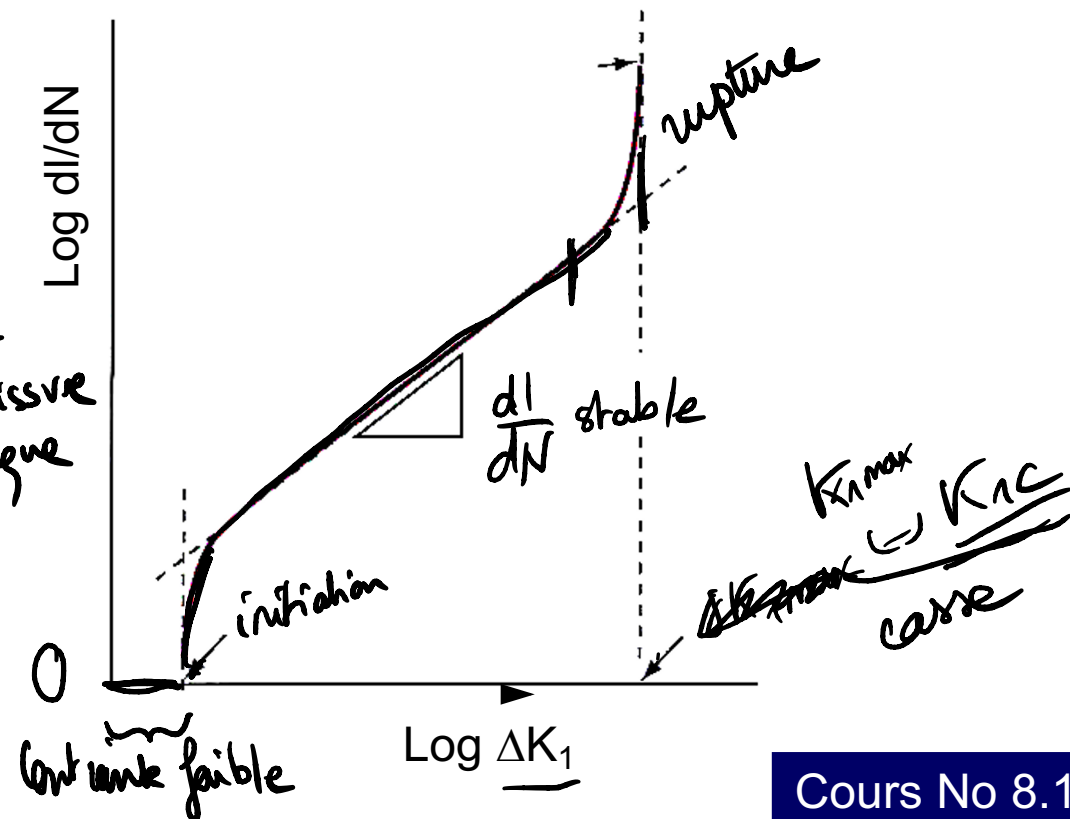
$$\Delta K_1 = K_{1,\max} - K_{1,\min} = \Delta\sigma\sqrt{\pi l}$$



A chaque cycle  $N$ , la fissure avance de  $dl$

$$\frac{dl}{dN} = \text{avancement de la fissure avec chaque cycle}$$

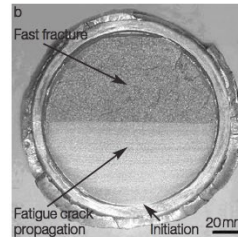
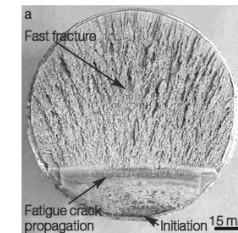
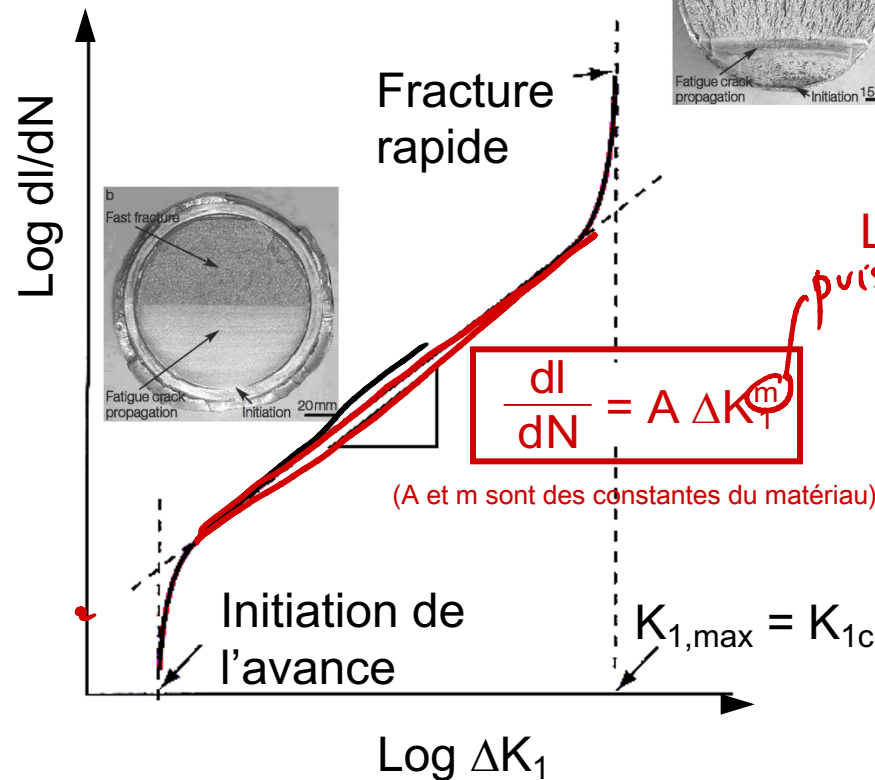
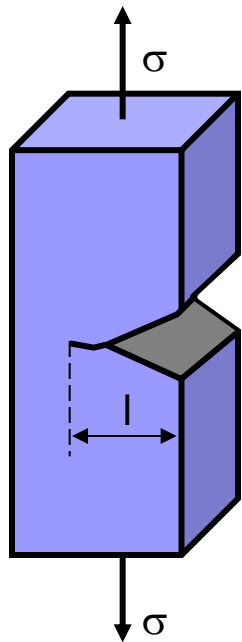
en m/cycle



# Fatigue de matériau fissuré

Que se passe-t-il si l'échantillon contient déjà des fissures? Avec  $\Delta\sigma$  appliqué constant, **le facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_1$  augmente** avec l'avance de la fissure de longueur  $l$ . Jusqu'à ce que  $K_1$  approche  $K_{1c}$ , où l'échantillon finit par se casser au cycle suivant.

$$\Delta K_1 = K_{1,\max} - K_{1,\min} = \Delta\sigma\sqrt{\pi l}$$



*A, m constantes du matériaux*

Loi de Paris

*puissance*

$$\log \frac{dl}{dN} = m \log \Delta K_1 + \log A$$

$$\frac{dl}{dN} = (\Delta K_1)^m A$$

# Fatigue de matériau fissuré

Dans ce cas, il faut limiter la contrainte pour rester avec  $\Delta K$  le plus petit possible, en dessous de la valeur d'initiation de l'avance, et donc contrôler la présence de fissures. On peut aussi calculer le nombre de cycles qu'il reste avant qu'une fissure de longueur  $l$  ne devienne dangereuse:

$$\frac{dl}{dN} = A (\Delta \sigma \sqrt{\pi l})^m$$

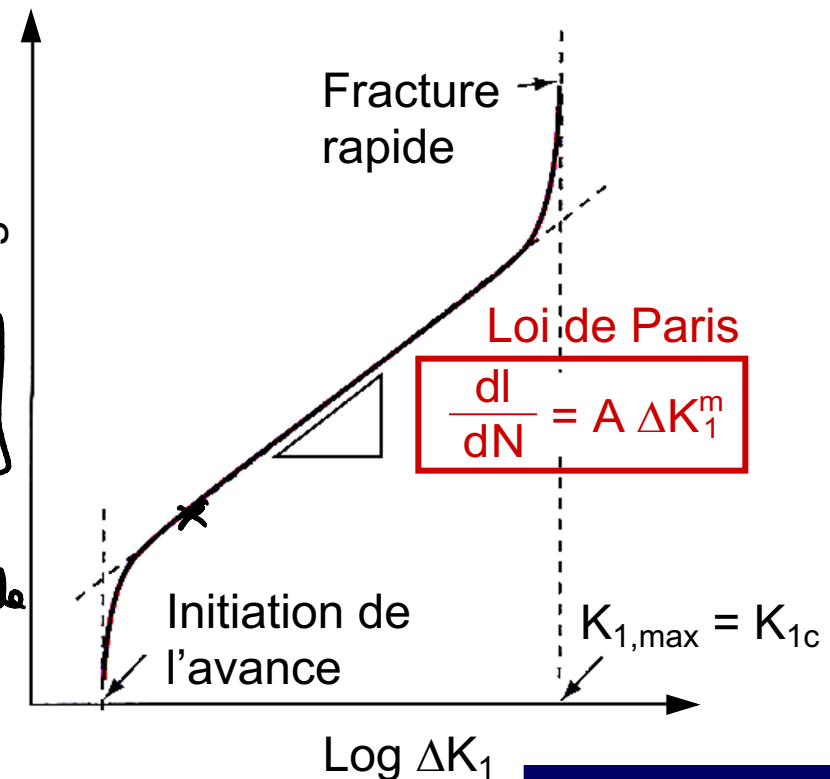
$N_c$ : nbre cycles avant que  $l = l_c$  pour  $\Delta \sigma$  donné

$$\frac{dl}{l^{m/2}} = A (\Delta \sigma \sqrt{\pi})^m dN \rightarrow dN = \frac{1}{A (\Delta \sigma \sqrt{\pi})^m} \frac{dl}{l^{m/2}}$$

$$N_c = \int_0^{N_c} dN = \int_{l_i}^{l_c} \frac{1}{A (\Delta \sigma \sqrt{\pi})^m} \frac{dl}{l^{m/2}} = \frac{1}{A (\Delta \sigma \sqrt{\pi})^m} \left[ l_c^{1-\frac{m}{2}} - l_i^{1-\frac{m}{2}} \right]$$

$\uparrow$   $l_c$   $\uparrow$   $l_{initiale}$

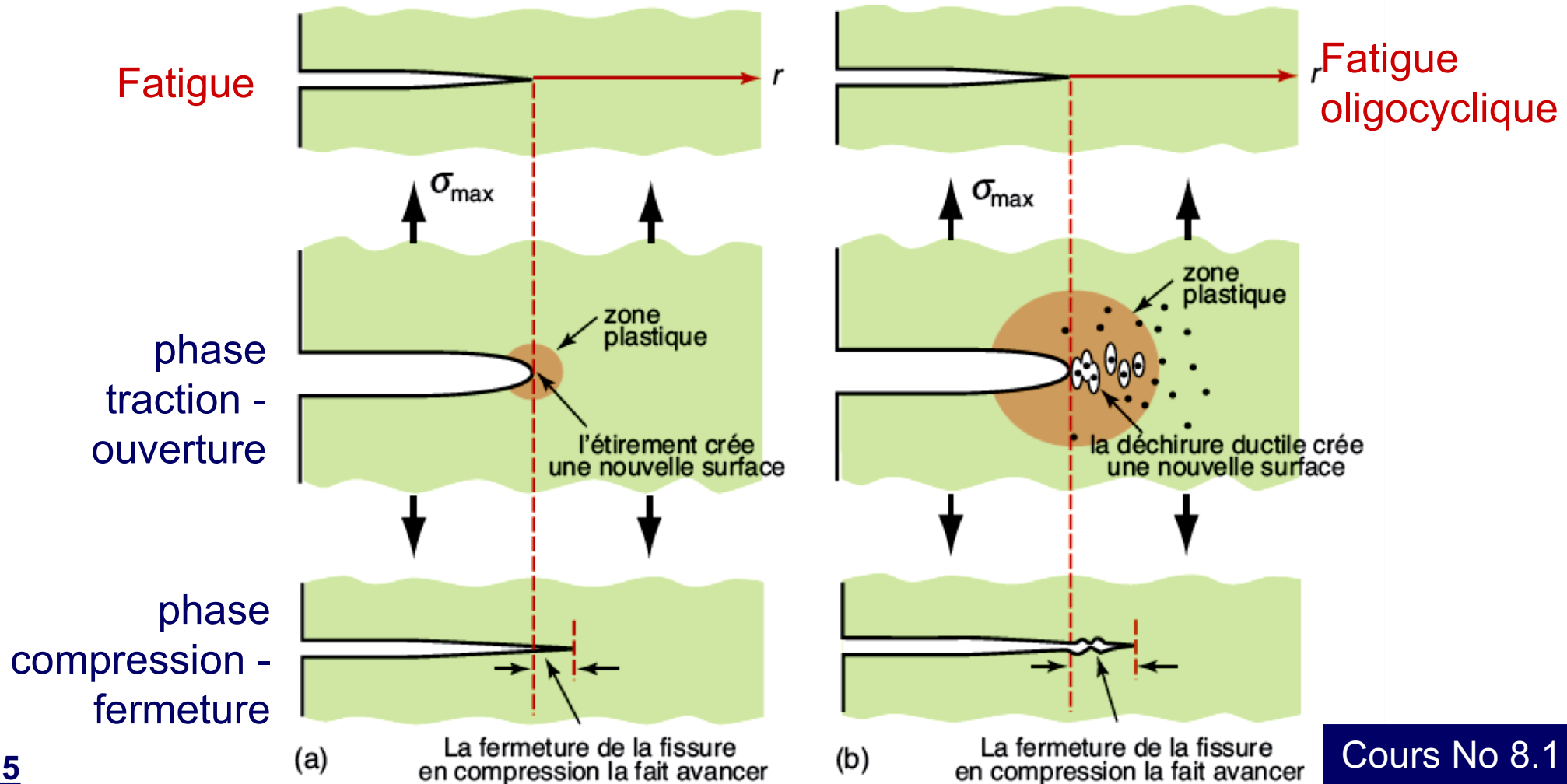
Avec  $l_i$  la longueur initiale de fissure, et  $l_c$  la longueur critique calculée à partir de  $K_{1c}$



# Fatigue des matériaux ductiles

Si l'endurance  $\sigma_e$  est assez bien corrélée avec  $\sigma_m$ , elle l'est moins avec  $\sigma_Y$ . Elle a tendance à diminuer lorsque  $\sigma_Y$  augmente.

## Mécanismes de propagation d'une fissure en fatigue



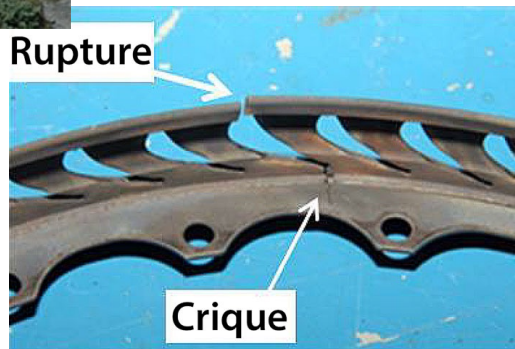
# Exemples de cas de fatigue

De nombreuses pièces sont soumises à de la fatigue, pouvant mener à leur rupture. Parfois indirectement, par chauffage (**fatigue thermique**).

Rupture d'une pièce du moteur  
d'hélicoptère entraînant un atterrissage  
d'urgence



<https://www.bst-tsb.gc.ca/fra/rapports-reports/aviation/2013/A13P0163/A163P0163.html>

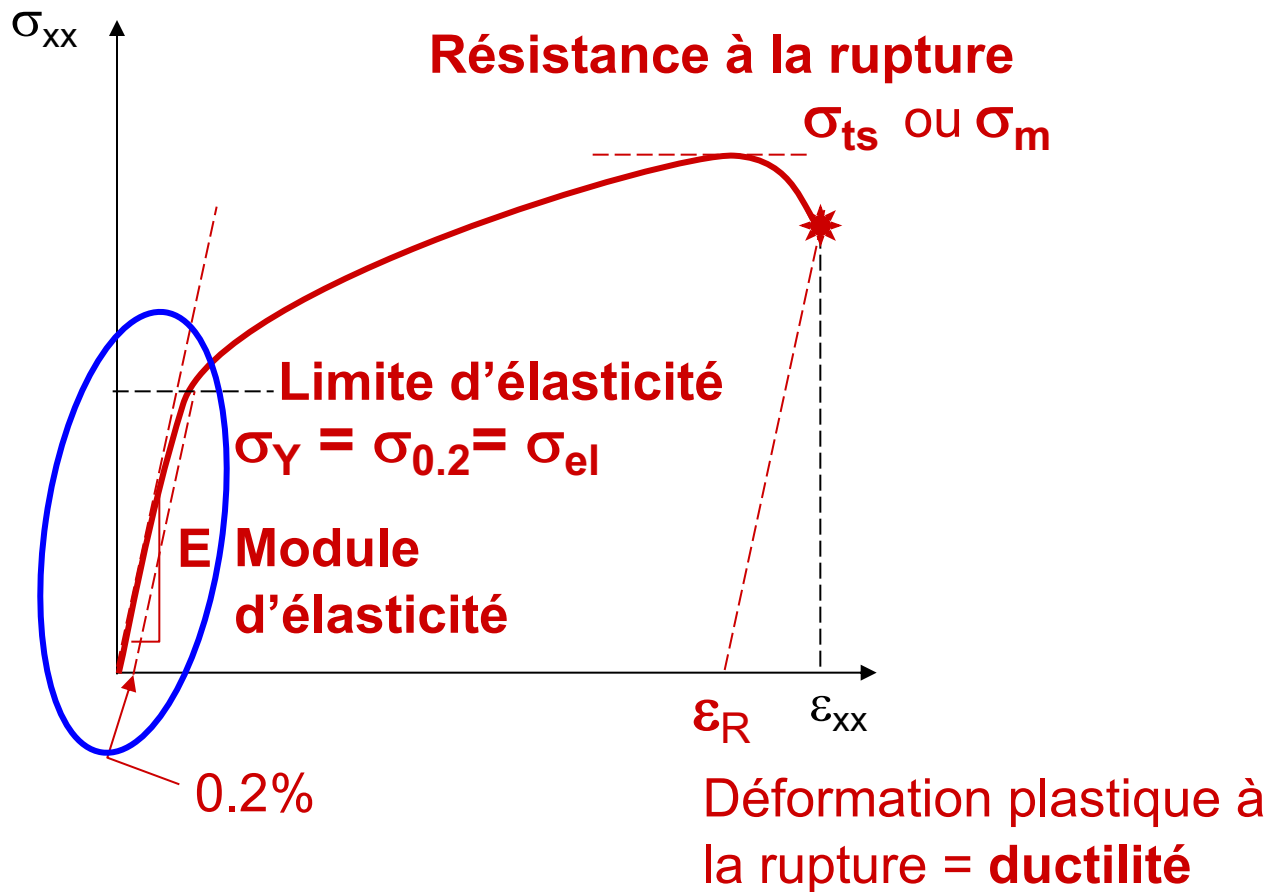


Fissure de fatigue thermique  
dans une soudure



# Rappel: Comportement en statique

Pour un matériau (exemple du métal) typique, pour un cas où la pièce est sous contrainte statique:



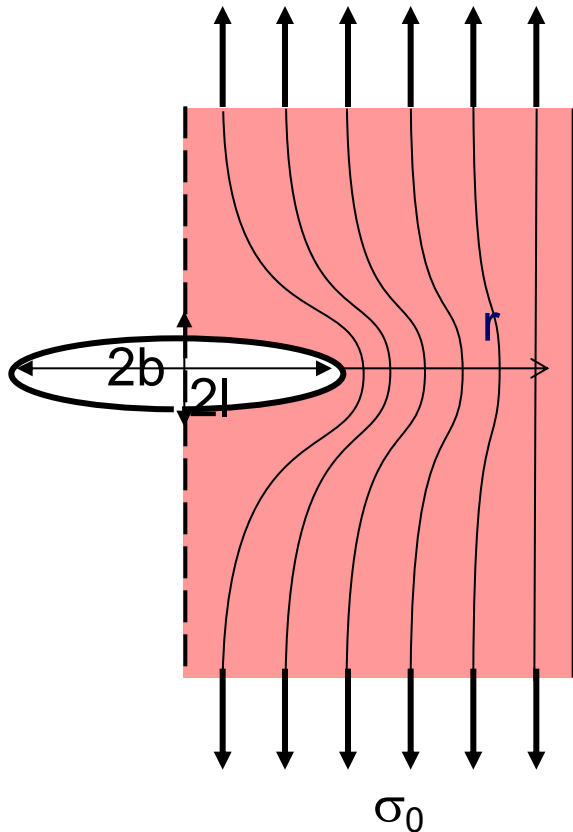
On cherche à rester sous la limite d'élasticité, sauf si on est prêt à autoriser une déformation irréversible

# Synthèse des propriétés mécaniques

|                              | Paramètres      | Relations                                                                                           | Origines                                                                                                                                                |
|------------------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Rigidité<br>(module d'Young) | E               | $\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx}$                                                            | Mét. et Cér.: liaisons entre les atomes<br>Polym: Liaisons entre les chaînes                                                                            |
| Limite d'Elasticité          | $\sigma_y$      | Convention:<br>Mét. et Cér: $e_y = 0.2\%$<br>Polym: $e_y = 0.5\%$                                   | Mét. et Cér.: début du mouvement des dislocations<br>Polym: début du glissement des chaînes                                                             |
| Dureté                       | $H_v, H_B$      | $H_v \text{ (MPa)} \approx 3 \cdot \sigma_y$                                                        | Mét. Pol.: déformation plastique<br>Cér.: fissuration                                                                                                   |
| Ecrouissage                  | n               | $n = d\sigma/d\varepsilon$ au-delà de $\sigma_y$                                                    | Mét. et Cér.: renforcement par création de dislocations pendant la déformation<br>Polym.: pas d'écrouissage                                             |
| Résistance                   | $\sigma_m$      | Contrainte maximale avant rupture                                                                   | Mét.: Striction puis rupture<br>Cér.: rupture fragile - fissures<br>Polym.: striction, microfissures                                                    |
| Ductilité                    | $\varepsilon_R$ | Déformation résiduelle juste avant la rupture<br><br>$\varepsilon_R = \varepsilon_{tot} - \sigma/E$ | Mét.: mouvement des dislocations (10%)<br>Cér.: cassent avant de se déformer plastiquement<br>Polym.: Elongation des chaînes et microfissures (50-100%) |
| Ténacité                     | $K_{1c}$        | $K_{1c} (= (2\gamma + G_{pl})^{1/2})$<br><i>donnée</i>                                              | Mét. Pol. : $G_{pl}$ domine<br>Cér. : faible ténacité, $G_{pl}$ négligeable                                                                             |

# Rappel: Matériau avec des entailles pointues

Si la pièce comporte des fissures ou des entailles pointues de longueur  $l$  alors localement près du trou, on a:



**Facteur d'intensité de contraintes** défini comme:

$$K_1 = \sigma_0 \sqrt{\pi l} \quad [\text{Pa m}^{1/2}]$$

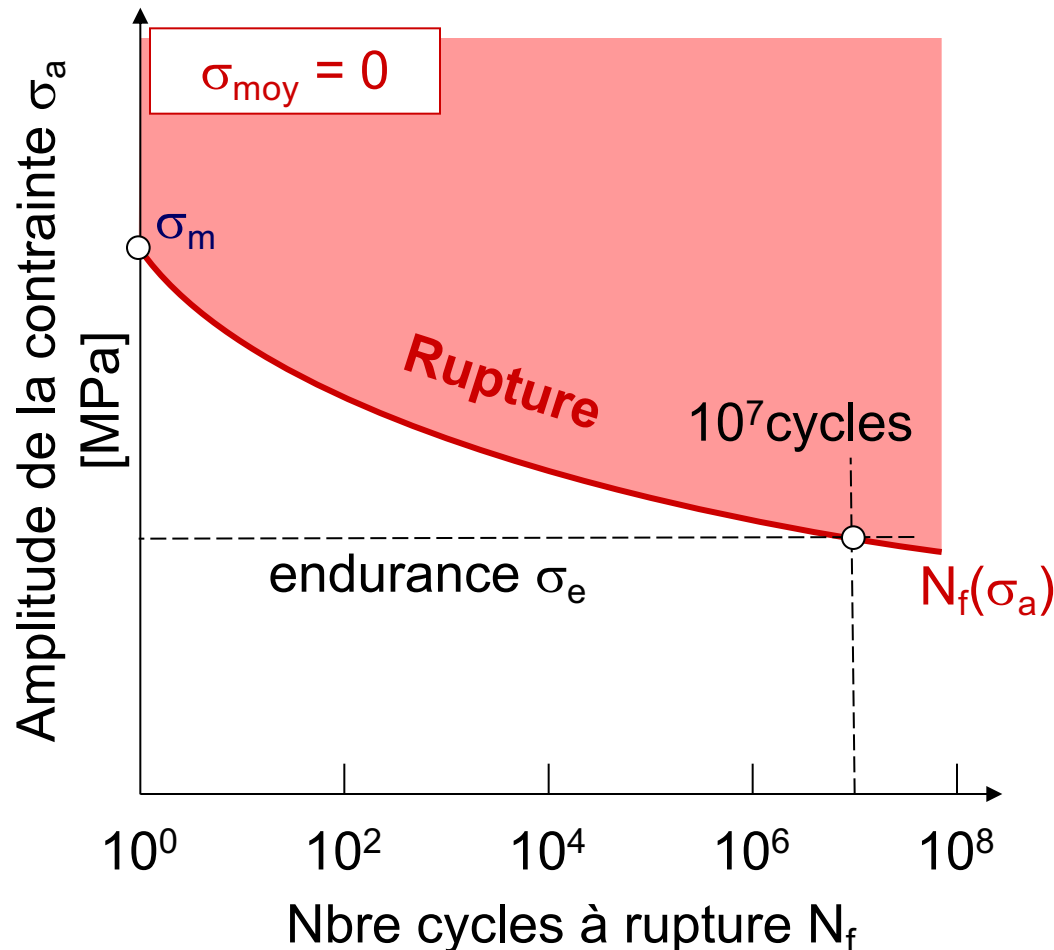
$$\sigma(r) \approx \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}$$

Où  $r$  est la distance depuis la pointe de fissure dans le matériau

On cherche à limiter la taille de la fissure ou la contrainte pour que  $K_1$  reste sous  $K_{1c}$ , **ténacité à la rupture**.

# Rappel: Comportement en dynamique

Si la sollicitation n'est pas continue mais est cyclique, alors on peut avoir rupture avant  $\sigma_m$ .



Courbe de Wohler, dans le cas de matériau avec un état de surface initial « normal ». Si on a des fissures de longueur  $l$ ,

$$\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi l} = 2 \sigma_a \sqrt{\pi l}$$

Dans certains cas, les fissures se propagent (au dessus d'une valeur de  $\Delta K$  critique) et propagent avec une vitesse donnée par:

$$\frac{dl}{dN} = A \Delta K^m$$

Avec  $A$  et  $m$  des constantes du matériau

# Etude de cas : réservoir sous pression

---

On veut réaliser un réservoir qui doit contenir du gas sous pression, qui est rempli et vidé régulièrement. Quel matériau choisir pour cela, quelle épaisseur de paroi? Le diamètre est donné,  $D=1.68\text{m}$ , et la pression maximale est  $P=14\text{ bars}= 1.4\text{ MPa}$

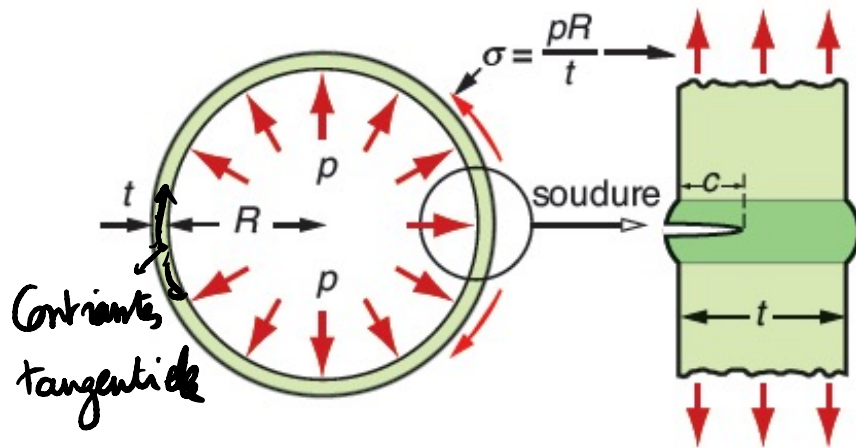


Stratégie:

- Résiste à la pression en statique
- Résiste à la présence de fissures d'une taille que l'on peut détecter
- Résiste à la fatigue

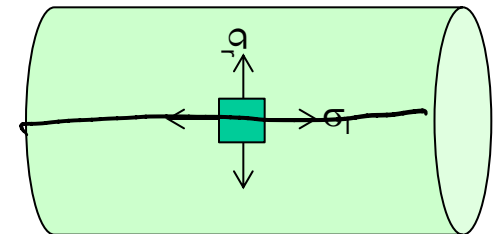
# Etude de cas : réservoir sous pression

Cylindre de rayon  $R$ , épaisseur  $t \ll R$ , pression  $p$



Contrainte de traction dans la paroi:

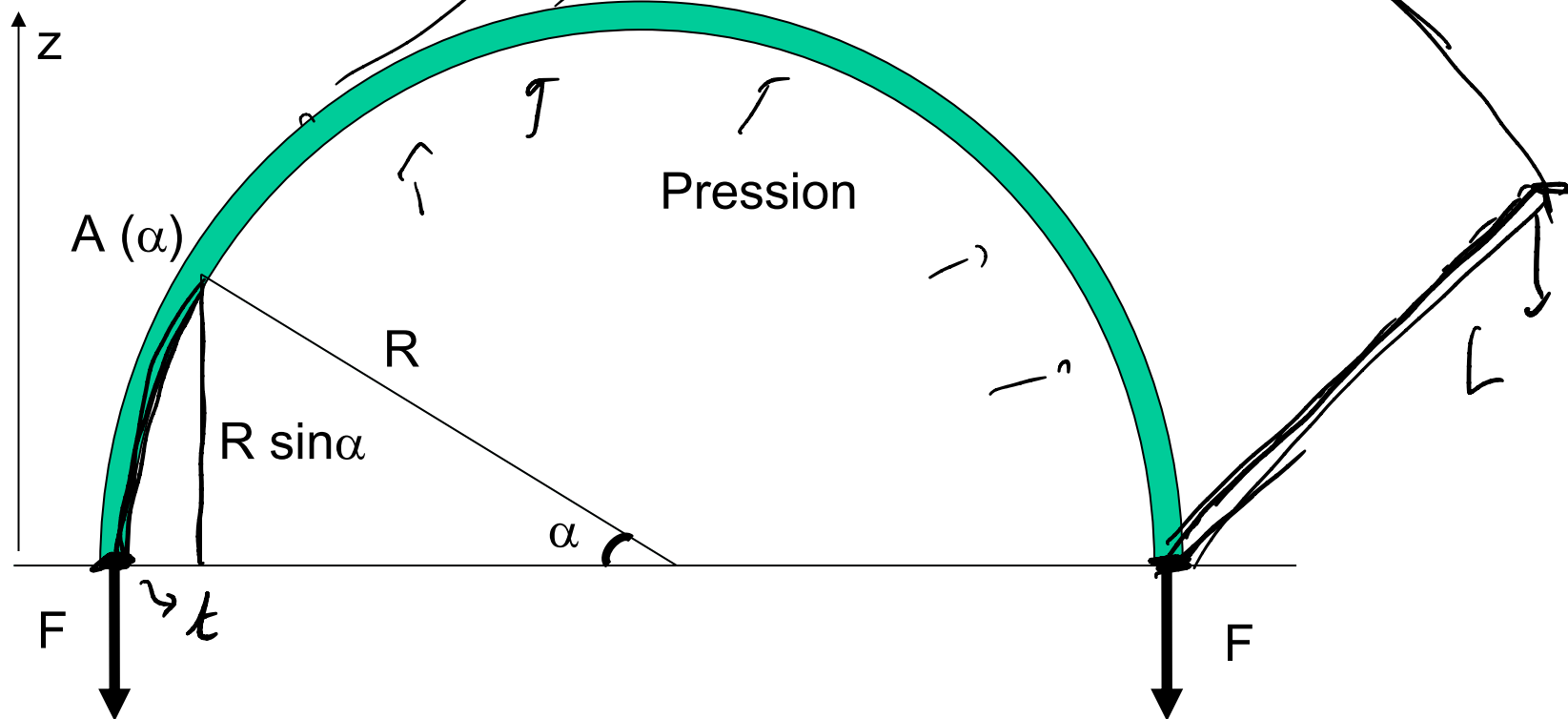
$$\sigma_r = \frac{pR}{t}$$



Contrainte de traction longitudinale dans la paroi:  
(moins critique)

$$\sigma_l = \frac{1}{2} \frac{pR}{t}$$

# Calcul des forces, équilibre sur une moitié



Projeté sur l'axe des  $z$  (vertical):

$$\sum \text{Forces} = 0 = -2F + \int_0^\pi \text{force au point } A(\alpha) \text{ projetée sur } z \, d\alpha$$

$$\sum \text{Forces} = 0 = -2F + \int_0^\pi \underbrace{P R \sin \alpha L}_{\text{force au point } A(\alpha) \text{ projetée sur } z} \, d\alpha$$

# Calcul des forces

---

$$2F = \int_0^{\pi} p R \sin \alpha L d\alpha = p R L \left[ -\cos \alpha \right]_0^{\pi} \\ = p R L (1 - (-1)) = 2p R L$$

$$F = p R L \quad \underline{\sigma}_R = \frac{F}{A} = \frac{p R L}{t L} = \frac{p R}{t}$$

# Etude de cas : réservoir sous pression

Cylindre de rayon  $R$ , épaisseur  $t \ll R$ , pression  $p$

Contrainte de traction dans la paroi:  $\sigma_r = \frac{pR}{t}$

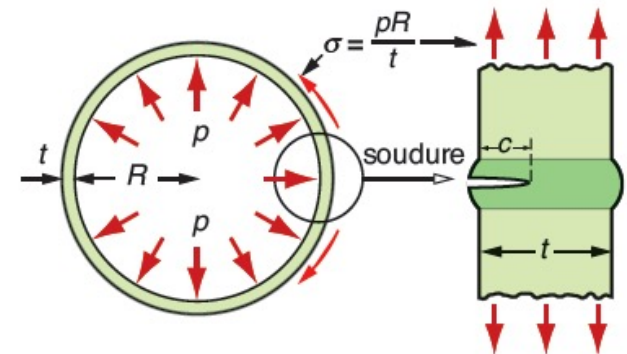
Critères:

1) contrainte inférieure à la limite d'élasticité ( $\sigma_r < \sigma_y$ ) donc

$\sigma_y$  assez grand  $\sigma_r = \frac{pR}{t} < \sigma_y \rightarrow t > \frac{pR}{\sigma_y}$  condition sur  $t$

2) Si fissure présente de longueur  $l_i$ , mieux vaut qu'elle ne se propage pas  $\rightarrow K_{Ic}$  pas trop petit non plus:

$$\sigma_r \sqrt{\pi l_i} = \frac{pR}{t} \sqrt{\pi l_i} \leq K_{Ic} \text{ du matériau}$$



# Etude de cas : réservoir sous pression

On veut que le matériau au pire plastifie, si il y a une surpression, avant propagation de fissure, donc la fissure max est telle que:

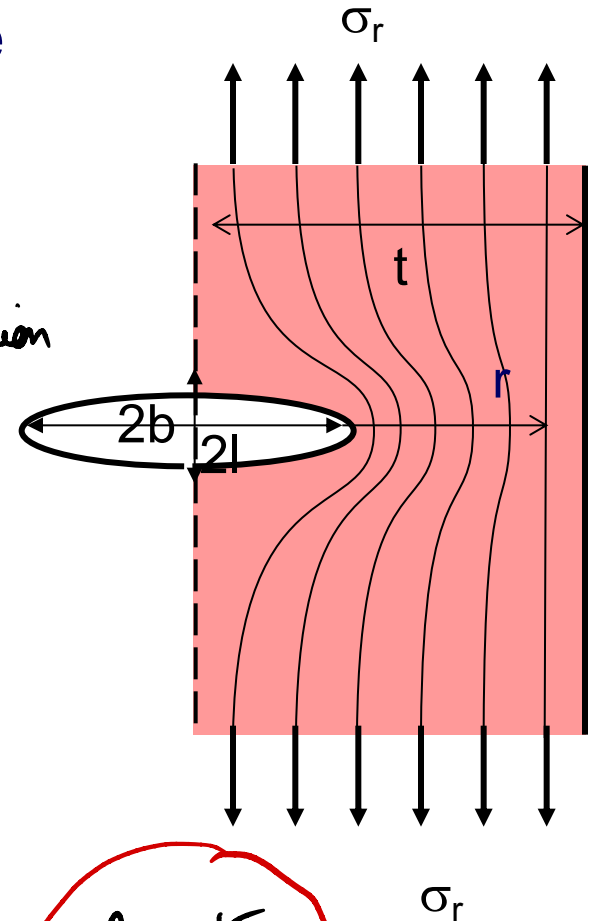
$l_{max}$  telle que atteint  $\sigma_y$  avant que  $l_{max}$  soit la longueur critique de propagation  
 $l_c$

$$K_{IC} = \sigma_R \sqrt{\pi l_c}$$

$$l_c = \frac{(K_{IC})^2}{\sigma_R^2 \pi}$$

on veut  $\sigma_R < \sigma_y$

$$\text{épaisseur } t \leq l_{max} \leq \frac{1}{\pi} \frac{(K_{IC})^2}{\sigma_y^2} \leq \frac{1}{\pi} \frac{K_{IC}^2}{\sigma_R^2}$$



$$M = \frac{K_{IC}}{\sigma_y}$$

# Etude de cas : réservoir sous pression

On veut de plus que le réservoir ait une fuite avant de rompre, donc qu'une fissure traversant toute l'épaisseur soit stable, donc

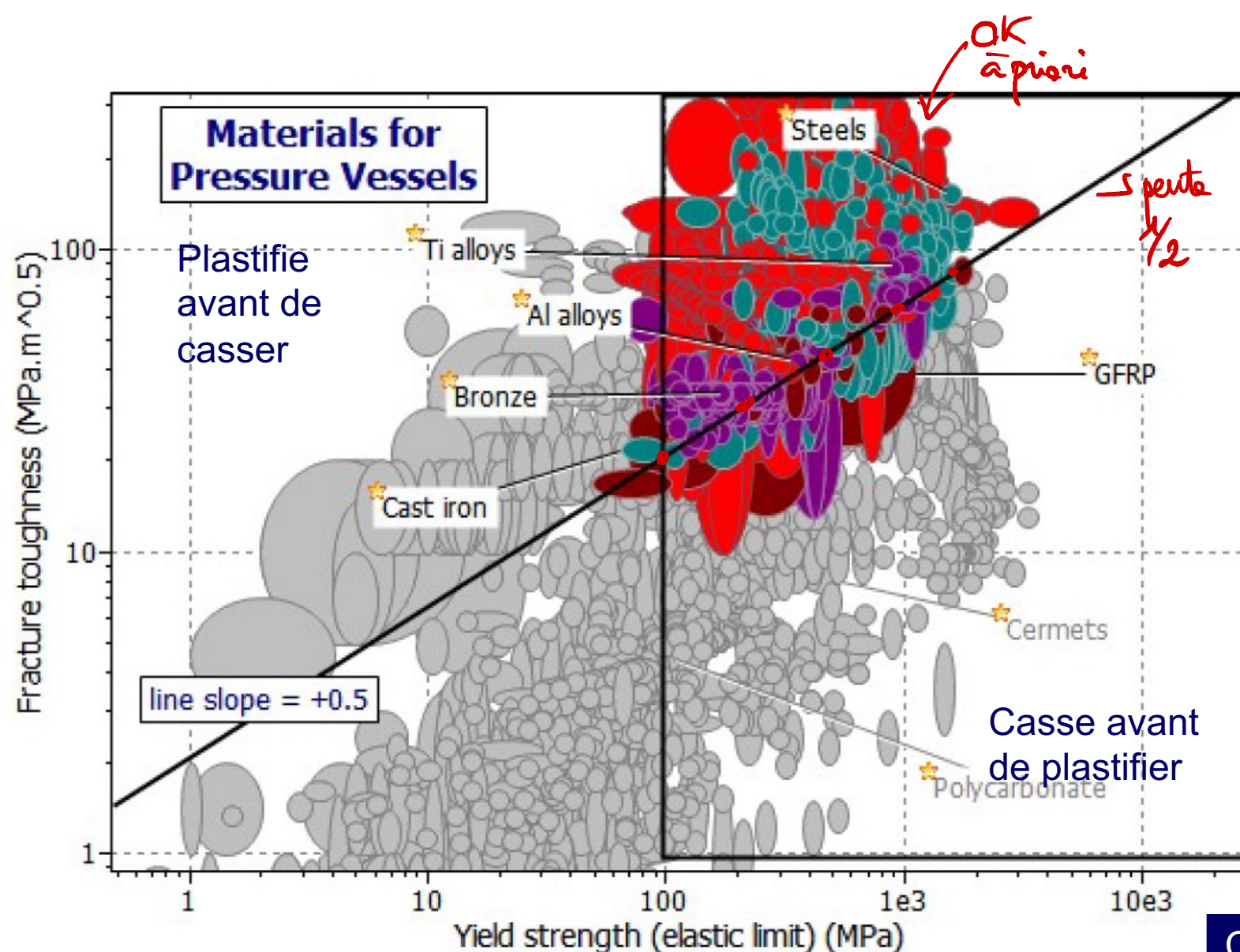
$l_{\max} > t$

$$t \leq l_{\max} \leq \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_y} \right)^2$$

On veut par ailleurs que  $t > pR/\sigma_y$  pour que le matériau reste élastique. Donc, au pire  $t$  est tel qu'on est à la limite d'élasticité, et  $t = pR/\sigma_y$ . Cela donne une limite de pression qui doit être telle que:

$$p \leq \frac{1}{\pi R} \left( \frac{K_{Ic}^2}{\sigma_y} \right) \rightarrow M_2 = \frac{K_{Ic}^2}{\sigma_y} \text{ le + grand possible}$$

# Choix des matériaux

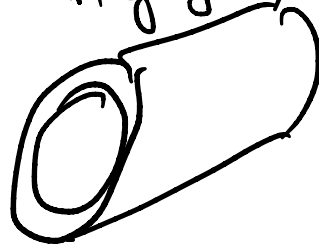


# Etude de cas : réservoir sous pression

Si le réservoir est mobile ( sur un camion, dans l'espace, etc..), on voudra en plus s'assurer que la masse du réservoir est la plus faible possible,

$$m = \rho V = \rho L \pi ((R+t)^2 - R^2) \simeq \rho L \pi 2tR \quad (-t^2 \text{ petit néglige})$$

hypothèse Réservoir tube longueur  $L$

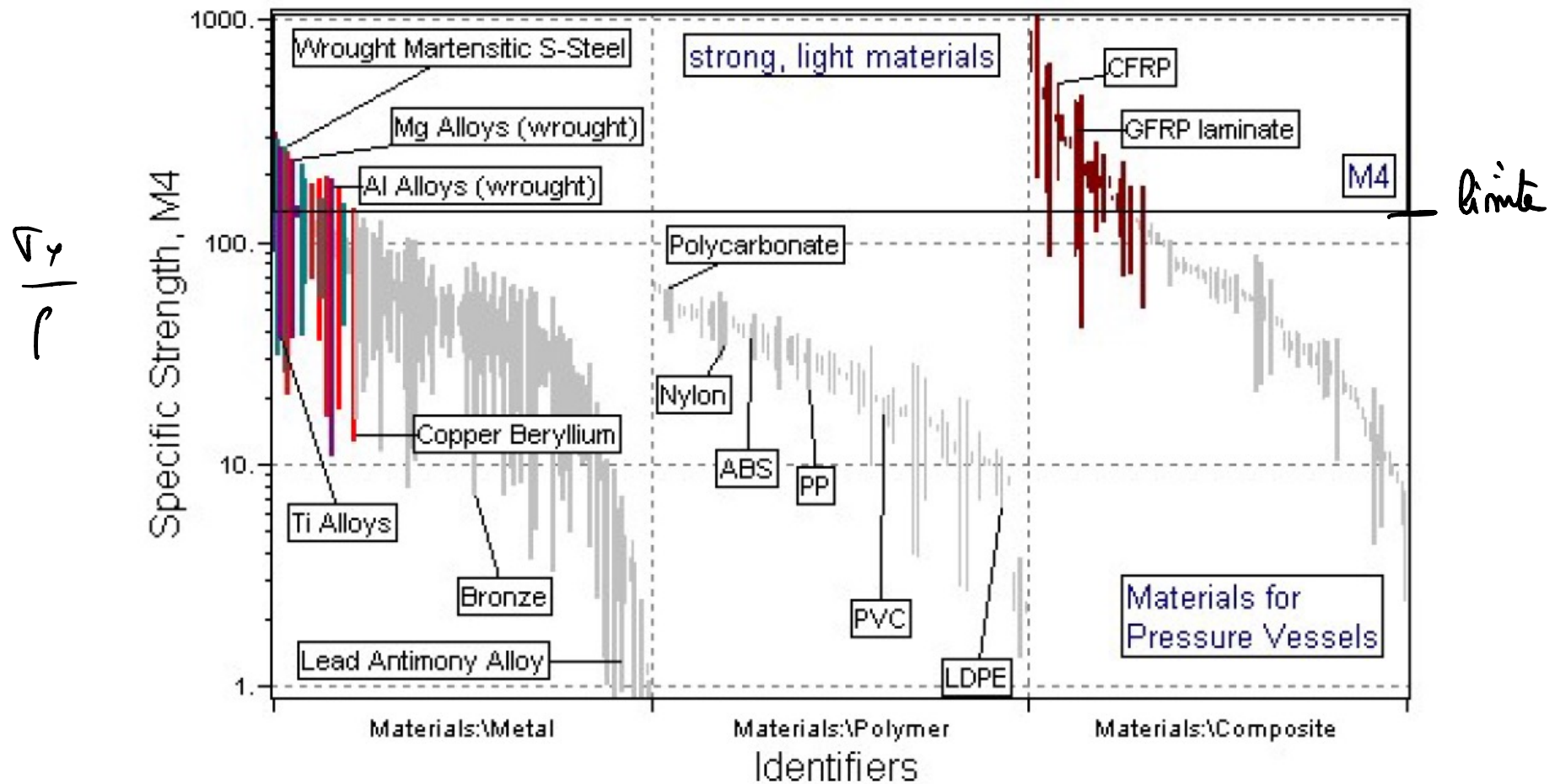


Comme par ailleurs,  $t > pR/\sigma_y$

$$\rho L \pi 2R \frac{pR}{\sigma_y} \text{ petit} = L 2 \pi R^2 p \left( \frac{p}{\sigma_y} \right)$$

$$\frac{p}{\sigma_y} \text{ le + petit possible} \quad \left( \frac{\sigma_y}{\rho} \text{ grand} \right)$$

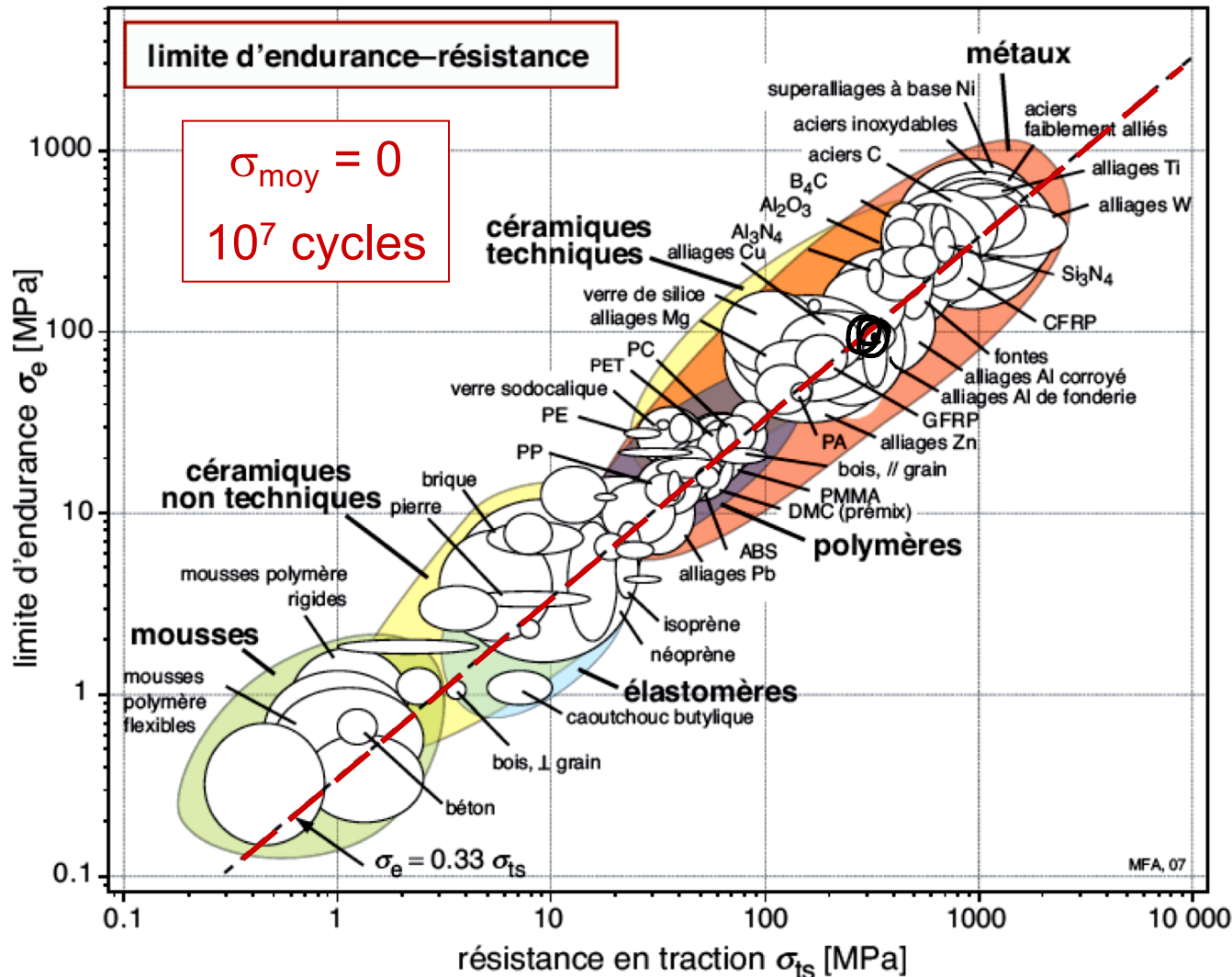
# Etude de cas : réservoir sous pression



# Fatigue

On veut aussi que le réservoir résiste à la fatigue...

$\sigma_y$  ?



$$\sigma_e \approx \frac{1}{3} \sigma_m$$

métaux  
polymères

$$\sigma_R < \sigma_e$$

# Etude de cas : réservoir sous pression

Finalement, quel matériau choisir, quelle épaisseur de paroi? Le diamètre est donné,  $D=1.68\text{m}$ , et la pression maximale est  $P=14\text{ bars}= 1.4\text{ Mpa}$ .



Choix de matériaux: Acier Inox

$$\sigma_y = 200 \text{ MPa}, K_{1c} = 100 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

$$\sigma_e \approx 200 \text{ MPa OK}$$

$$t > \frac{PR}{\sigma_y}$$

$$t < \left( \frac{K_{1c}^2}{\sigma_y^2} \right)^{\frac{1}{\pi}}$$

$$t > \frac{1.68^m}{2} \times \frac{1.4 \text{ MPa}}{200 \text{ MPa}} \approx 5.8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 5.8 \text{ mm}$$

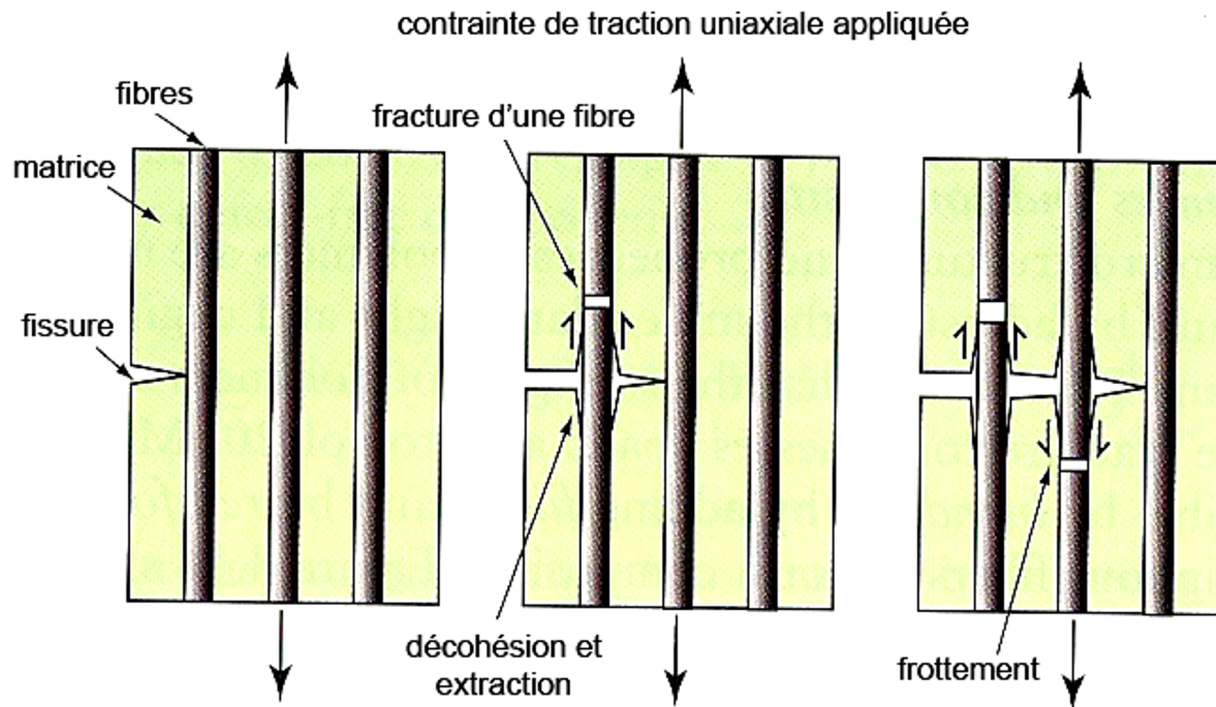
$$t < \left( \frac{100}{200} \right)^2 \frac{1}{\pi} \sim 79 \text{ mm}$$

Facteur sécurité  $P_{\text{max}} = 2P$

→  $t$  entre 12 mm et 79 mm

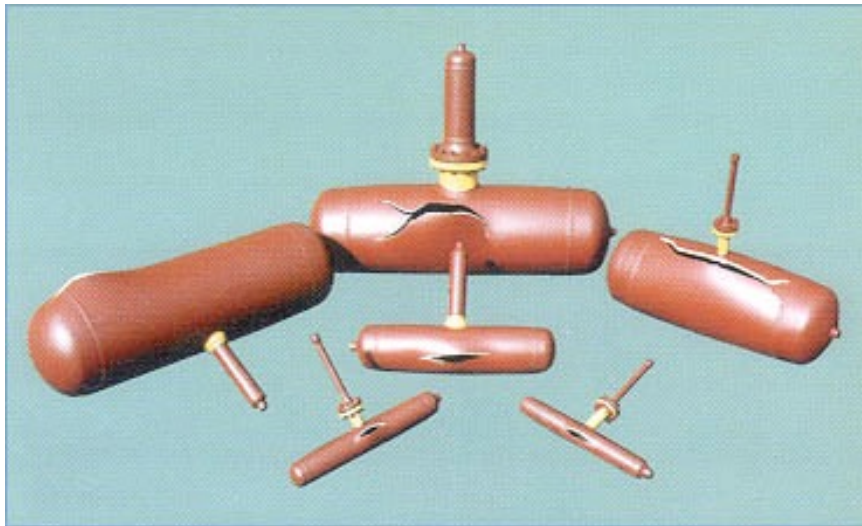
# Rupture des matériaux composites

Les **matériaux composites** sont souvent utilisés dans les récipients sous pression. Ils ont des modes de rupture très spécifiques, avec des fissures qui se propagent dans la matrice, avec ensuite rupture des fibres et décohéation entre fibres et matrice.



# Test du réservoir

Les réservoirs sont testés de manière régulière, en les pressurant à environ 1.5 fois la pression nominale, après les avoir rempli avec un liquide incompressible (eau ou huile). On met des jauges de déformation sur le réservoir pour voir si on a une déformation résiduelle (plasticité), ou bien on mesure le volume de liquide qui rentre encore pendant le test (de 30 secondes).



Spromak Ltd



LockheedMartin

# Résumé

---

- Le choix d'un matériau et de la géométrie de la pièce (épaisseur, ..) est lié à des critères qui dépendent des conditions d'application,
- Pour un réservoir sous pression, la sécurité recommande de plastifier ou mieux avoir une fuite avant la rupture catastrophique. D'autres critères peuvent influencer (le poids, la résistance à la corrosion...).

# A retenir du cours d'aujourd'hui

---

- *Bien connaître les définitions révisées, et savoir ce qu'est le facteur de concentration de contraintes, versus le facteur d'intensité de contraintes, versus la ténacité.*
- *Savoir manipuler les lois de Goodman et Miner pour prédire la durée de vie en fatigue si la contrainte moyenne est non nulle ou l'amplitude varie.*
- *Savoir que, si il y a une fissure dans une pièce sollicitée en fatigue, on peut calculer le nombre de cycles restant avant d'arriver à une fissure de longueur critique, en passant par la loi de Paris.*
- *Savoir manipuler ces concepts pour faire un dimensionnement simple de structure.*